2020.11.09　高1HR　数学演習　【解答･解説】

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $ax^2-(a+1)x-2=0$ が，$-1<x<0$，$2<x<3$ の範囲でそれぞれ 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$\dfrac{5}{6}<a<2$

解説

2 次方程式とあるから，$a \neq 0$ であり，$f(x)=ax^2-(a+1)x-2$ とする。

このとき　$f(-1)=2a-1$,　$f(0)=-2$,　$f(2)=2a-4$,　$f(3)=6a-5$

2 次方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<0$，$2<x<3$ の範囲でそれぞれ 1 つの実数解をもつための条件は　$f(-1)f(0)<0$　かつ　$f(2)f(3)<0$

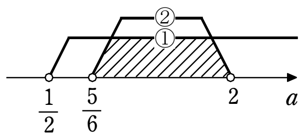
$f(-1)f(0)<0$ から　$(2a-1)\cdot(-2)<0$

よって　$2a-1>0$　　ゆえに　$a>\dfrac{1}{2}$　…… ①

$f(2)f(3)<0$ から　$(2a-4)(6a-5)<0$

よって　$(a-2)(6a-5)<0$

ゆえに　$\dfrac{5}{6}<a<2$　…… ②



①，② の共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{6}<a<2$

別解　$f(x)=ax^2-(a+1)x-2$ とする。

$a \neq 0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは放物線である。

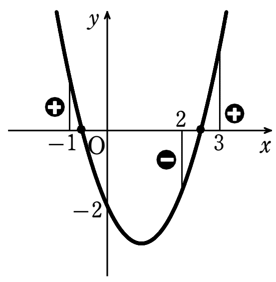
$f(0)=-2<0$ であるから，求める条件は

$f(-1)>0$，$f(2)<0$，$f(3)>0$

すなわち　$2a-1>0$，$2a-4<0$，$6a-5>0$

よって　$a>\dfrac{1}{2}$，$a<2$，$a>\dfrac{5}{6}$

これらの共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{6}<a<2$



$\boxed{2}$ 2 次方程式 $(-2a+15)x^2-(4a-18)x+3a^2-6a-24=0$ が，-2 より大きく 0 より小さい解と，0 より大きく 1 より小さい解の 2 つの解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$-2<a<0$，$3<a<4$

解説

$f(x)=(-2a+15)x^2-2(2a-9)x+3(a^2-2a-8)$ とする。

与式は 2 次方程式であるから　$a \neq \dfrac{15}{2}$

[1]　$a<\dfrac{15}{2}$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める条件は　$f(-2)>0$，$f(0)<0$，$f(1)>0$

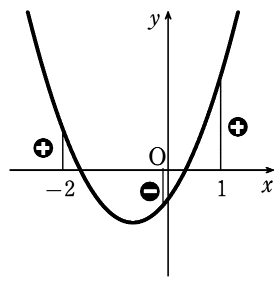
$f(-2)=4(-2a+15)+4(2a-9)+3(a^2-2a-8)$

$=3a^2-6a=3a(a-2)>0$

ゆえに　$a<0$，$2<a$　…… ①

$f(0)=3(a^2-2a-8)=3(a+2)(a-4)<0$

ゆえに　$-2<a<4$　…… ②



$f(1)=(-2a+15)-2(2a-9)+3(a^2-2a-8)$

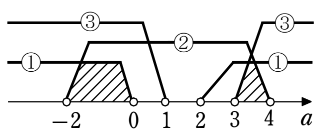
$=3a^2-12a+9=3(a-1)(a-3)>0$

ゆえに　$a<1$，$3<a$　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$-2<a<0$，$3<a<4$

これは $a<\dfrac{15}{2}$ を満たす。



[2]　$a>\dfrac{15}{2}$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，求める条件は　$f(-2)<0$，$f(0)>0$，$f(1)<0$

$f(-2)=3a(a-2)<0$

ゆえに　$0<a<2$　…… ④

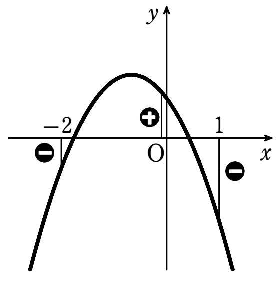
$f(0)=3(a+2)(a-4)>0$

ゆえに　$a<-2$，$4<a$　…… ⑤

$f(1)=3(a-1)(a-3)<0$

ゆえに　$1<a<3$　…… ⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲はない。



以上から，求める a の値の範囲は　$-2<a<0$，$3<a<4$

$\boxed{3}$（暇つぶし用問題）

x の 4 次方程式

$$x^4-ax^2+1=0 \ (a \text{ は実数の定数}) \quad \cdots\cdots (*)$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2=X$ とおくとき，$(*)$ を X の方程式として表せ。

(2)　(1) の方程式が異なる 2 つの正の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　$(*)$ が異なる 4 つの実数解をもち，それらが数直線上で等間隔に並ぶとき，a の値と 4 つの実数解を求めよ。

解答　(1)　$X^2-aX+1=0$　　(2)　$a>2$　　(3)　$a=\dfrac{10}{3}$；$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$\pm\sqrt{3}$

解説

(1)　$X^2-aX+1=0$　…… ①

(2)　方程式 ① の判別式を D とすると

$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot1=a^2-4=(a+2)(a-2)$

① の 2 つの解を α，β とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=1$

① が異なる 2 つの正の実数解をもつための条件は

$D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

$D>0$ から　$(a+2)(a-2)>0$

よって　$a<-2$，$2<a$　…… ②

$\alpha+\beta>0$ から　$a>0$　…… ③

$\alpha\beta>0$ から　$1>0$　　これは常に成り立つ。

求める a の値の範囲は，② と ③ の共通範囲で　$a>2$

(3)　$x^2=X$ により，① の正の実数解 1 つに $(*)$ の実数解 2 つが対応する。

よって，$(*)$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，① は異なる 2 つの正の実数解をもつ。

それを $X=\alpha$，b $(0<\alpha<\beta)$ とすると，$(*)$ の異なる 4 つの実数解は

$x=\pm\sqrt{\alpha}$，$\pm\sqrt{\beta}$ である。

$-\sqrt{\beta}<-\sqrt{\alpha}<\sqrt{\alpha}<\sqrt{\beta}$ であるから，4 つの実数解が数直線上で等間隔に並ぶとき

$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}-(-\sqrt{\alpha})=-\sqrt{\alpha}-(-\sqrt{\beta})$

よって　$\sqrt{\beta}=3\sqrt{\alpha}$　　ゆえに　$\beta=9\alpha$

また，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=1$

$\alpha\beta=1$ と $\beta=9\alpha$ から　$\alpha\cdot9\alpha=1$

よって　$\alpha^2=\dfrac{1}{9}$　　$\alpha>0$ であるから　$\alpha=\dfrac{1}{3}$

したがって，$\beta=9\alpha$ から　$\beta=9\cdot\dfrac{1}{3}=3$

以上から　$a=\alpha+\beta=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$　　4 つの実数解は　$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$\pm\sqrt{3}$